ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

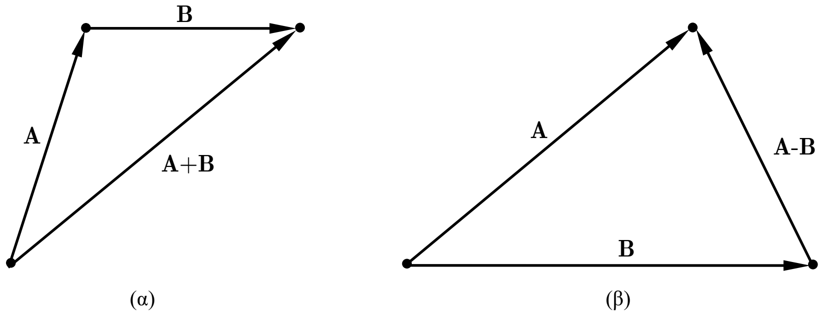
Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια σύντομη ανασκόπηση των θεμελιωδών εννοιών και ιδιοτήτων της διανυσματικής ανάλυσης (Δ.Α.). Η καλή γνώση και η εύκολη χρήση της θεωρίας της Δ.Α. αποτελούν απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση της θεωρίας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και την επίλυση των σχετικών προβλημάτων. Γι' αυτό, κρίνουμε σκόπιμο, στη συνέχεια, να αναφέρουμε, αρκετά σύντομα, τις βασικές έννοιες της Δ.Α. και να παραθέσουμε μια σειρά από χαρακτηριστικά παραδείγματα και ασκήσεις. Θεωρείται αυτονόητο, ότι ο αναγνώστης που είναι εξοικειωμένος με τη χρήση των πιο πάνω εννοιών, μπορεί να αρχίσει τη μελέτη του βιβλίου κατευθείαν από το δεύτερο κεφάλαιο, χωρίς να σταθεί καθόλου στην παρούσα συνοπτική παρουσίαση της θεωρίας της Δ.Α.

1.1 Φυσικά μεγέθη

Βαθμωτό μέγεθος. Μια φυσική ποσότητα που ορίζεται από το μέτρο και το αλγεβρικό πρόσημό της, ονομάζεται βαθμωτό, ή σκαλινό (scalar), ή αριθμητικό μέγεθος. Παραδείγματα τέτοιων μεγεθών είναι η μάζα, ο χρόνος, η θερμοκρασία, το έργο κ.α.

Διανυσματικό μέγεθος. Μια φυσική ποσότητα που ορίζεται από την κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά) και το μέτρο της, ονομάζεται διανυσματικό μέγεθος ή απλώς διάνυσμα. Παραδείγματα διανυσματικών μεγεθών είναι η δύναμη, η ταχύτητα, η επιτάχυνση κ.α. Τα διανύσματα, συνήθως, συμβολίζονται με γράμματα που έχουν επιγραμμή (ή βέλος) στο πάνω μέρος τους, π.χ. $\overline{\alpha}, \overline{D}, \overline{E}$ κ.λ.π. Στο βιβλίο αυτό τα διανύσματα παρίστανται με γράμματα μεγάλου πάχους, π.χ. $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ κ.λ.π.

Πεδίο. Αν σε κάθε σημείο ενός χώρου αντιστοιχίζεται μια τιμή κάποιας "φυσικής" συνάρτησης, ο χώρος αυτός ονομάζεται πεδίο. Τα πεδία – ανάλογα προς το είδος της συνάρτησης – διακρίνονται σε βαθμωτά (σκαλινά) και διανυσματικά. Έτσι, αν η τιμή της φυσικής συνάρτησης σε κάθε σημείο του θεωρούμενου χώρου είναι μια βαθμωτή ποσότητα, τότε, το πεδίο είναι βαθμωτό. Η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας και η πυκνότητα ενός μη ομογενούς σώματος είναι δύο παραδείγματα μεγεθών βαθμωτών πεδίων. Όταν η τιμή της συνάρτησης σε κάθε σημείο του χώρου είναι μια διανυσματική ποσότητα, το πεδίο ονομάζεται διανυσματικό πεδίο. Η ταχύτητα του



ΣΧΗΜΑ 1.1

ανέμου της ατμόσφαιρας και η δύναμη της βαρύτητας αποτελούν παραδείγματα μεγεθών διανυσματικών πεδίων.

1.2 Διανυσματική Άλγεβρα

Άθροισμα και διαφορά δύο διανυσμάτων. Στα σχήματα 1.1(α) και 1.1(β) φαίνεται ο τρόπος (κανόνας παραλληλογράμμου) με τον οποίο ορίζεται το άθροισμα $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ και η διαφορά $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ δύο διανυσμάτων, αντίστοιχα.

Η αντιμεταθετική ιδιότητα

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \tag{1.1}$$

και η προσεταιριστική ιδιότητα

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}, \tag{1.2}$$

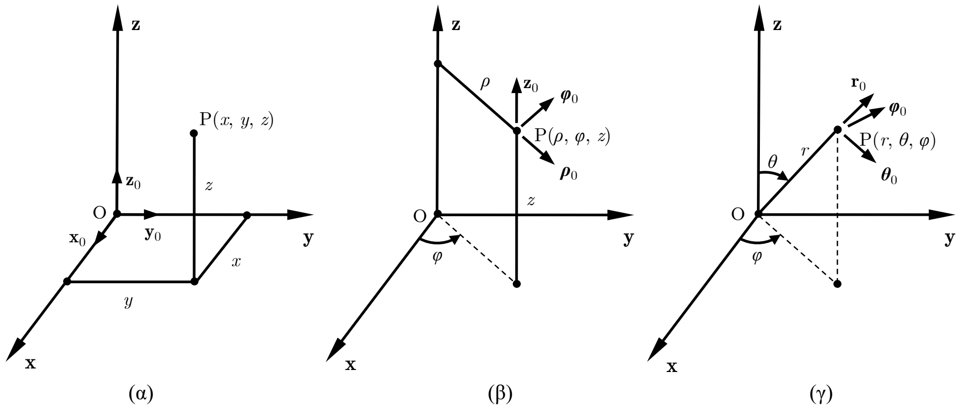
είναι προφανείς από τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Επίσης, από τον προηγούμενο κανόνα γίνεται φανερό ότι ένα διάνυσμα μπορεί να αναλυθεί σε δύο ή περισσότερες συνιστώσες.

Γινόμενο ενός αριθμού a **με ένα διάνυσμα** $\mathbf{A}$ είναι ένα άλλο διάνυσμα $\mathbf{P}=a\mathbf{A}$ που έχει μήκος ίσο με το γινόμενο της απόλυτης τιμής $|a|$ και του μέτρου του διανύσματος $\mathbf{A}$ και του οποίου η κατεύθυνση είναι εκείνη του διανύσματος $\mathbf{A}$ όταν ο αριθμός a είναι θετικός και αντίθετη όταν ο αριθμός a είναι αρνητικός.

Τα γνωστότερα και περισσότερο χρησιμοποιούμενα συστήματα συντεταγμένων είναι το καρτεσιανό (x,y,z), το κυλινδρικό (ρ,φ,z) και το σφαιρικό (r,θ,φ), των σχημάτων 1.2(α), 1.2(β) και 1.2(γ), αντίστοιχα.

Ένα διάνυσμα μπορεί να αναλυθεί σε συνιστώσες παράλληλες προς τους άξονες του χρησιμοποιούμενου συστήματος συντεταγμένων. Έτσι, σ' ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων έχουμε

$$\mathbf{A}=A_x\mathbf{x}_0+A_y\mathbf{y}_0+A_z\mathbf{z}_0, \tag{1.3}$$



Σχημα 1.2

όπου A_x, A_y και A_z είναι οι προβολές του διανύσματος $\mathbf{A}$ στους άξονες x, y και z αντίστοιχα, και $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ και $\mathbf{z}_0$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά τη θετική διεύθυνση των αξόνων x, y και z αντίστοιχα. Από το σχήμα 1.2 προκύπτουν αντίστοιχα προς την (1.3) οι εκφράσεις

$$\mathbf{A} = A_\rho \boldsymbol{\rho}_0 + A_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0 + A_z \mathbf{z}_0 \qquad \text{(κυλινδρικές συντεταγμένες)}, \tag{1.4}$$

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{r}_0 + A_\theta \boldsymbol{\theta}_0 + A_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0. \qquad \text{(σφαιρικές συντεταγμένες)} \tag{1.5}$$

Το άθροισμα $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, των διανυσμάτων $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$, με πρόσθεση των αντίστοιχων συνιστωσών γράφεται

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x + B_x)\mathbf{x}_0 + (A_y + B_y)\mathbf{y}_0 + (A_z + B_z)\mathbf{z}_0 \\ &= (A_\rho + B_\rho)\boldsymbol{\rho}_0 + (A_\varphi + B_\varphi)\boldsymbol{\varphi}_0 + (A_z + B_z)\mathbf{z}_0 \\ &= (A_r + B_r)\mathbf{r}_0 + (A_\theta + B_\theta)\boldsymbol{\theta}_0 + (A_\varphi + B_\varphi)\boldsymbol{\varphi}_0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Επίσης, σ' οποιαδήποτε διανυσματική εξίσωση, το άθροισμα των συνιστωσών που είναι παράλληλες προς τον άξονα x στο αριστερό μέλος θα είναι ίσο με το άθροισμα των συνιστωσών που είναι παράλληλες προς τον άξονα x στο δεξιό μέλος. Το ίδιο ισχύει, προφανώς, και για τις συνιστώσες τις παράλληλες προς τους άλλους άξονες. Έτσι, για παράδειγμα, η διανυσματική εξίσωση

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{D} + \mathbf{E}, \tag{1.7}$$

ισοδυναμεί προς το σύστημα των τριών εξισώσεων

$$A_x + B_x = C_x + D_x + E_x, \tag{1.8}$$

$$A_y + B_y = C_y + D_y + E_y, \tag{1.9}$$

$$A_z + B_z = C_z + D_z + E_z \tag{1.10}$$

κ.ο.κ. στα άλλα συστήματα συντεταγμένων.

Εσωτερικό γινόμενο. Το εσωτερικό ή σκαλινό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$, συμβολιζόμενο ως $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, είναι ένα βαθμωτό μέγεθος ίσο προς το γινόμενο των μέτρων των δύο διανυσμάτων επί το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας, δηλαδή

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |A| \cdot |B| \cos\theta = AB\cos\theta, \tag{1.11}$$

Επίσης, το εσωτερικό γινόμενο, στα διάφορα συστήματα συντεταγμένων, δίνεται από τις εκφράσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= A_\rho B_\rho + A_\varphi B_\varphi + A_z B_z = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\varphi B_\varphi. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Οι δύο εκφράσεις (1.11) και (1.12) είναι, προφανώς, ισοδύναμες.

Ακόμα, στο εσωτερικό γινόμενο ισχύουν η αντιμεταθετική και επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή οι

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \tag{1.13}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}. \tag{1.14}$$

Εξωτερικό γινόμενο. Το εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο, συμβολιζόμενο ως $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, ορίζεται γεωμετρικά ως το διανυσματικό μέγεθος

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB\sin\theta \mathbf{n}_0, \tag{1.15}$$

όπου $\mathbf{n}_0$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$, με φορά σύμφωνη με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία, όταν το διάνυσμα $\mathbf{A}$ στρέφεται προς το $\mathbf{B}$, σαρώνοντας τη μικρότερη γωνία θ. Από τον ορισμό, γίνεται φανερό ότι ισχύουν οι

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}, \tag{1.16}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}. \tag{1.17}$$

Οι εκφράσεις του εξωτερικού γινομένου στα πιο πάνω συστήματα συντεταγμένων είναι οι ακόλουθες

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad \text{(καρτεσιανές συντεταγμένες)}$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{x}_0 + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{y}_0 + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{z}_0$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{\rho}_0 & \boldsymbol{\varphi}_0 & \mathbf{z}_0 \\ A_\rho & A_\varphi & A_z \\ B_\rho & B_\varphi & B_z \end{vmatrix} \qquad \text{(κυλινδρικές συντεταγμένες)}$$

$$= (A_\varphi B_z - A_zB_\varphi)\boldsymbol{\rho}_0 + (A_zB_\rho - A_\rho B_z)\boldsymbol{\varphi}_0 + (A_\rho B_\varphi - A_\varphi B_\rho)\mathbf{z}_0$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{r}_0 & \boldsymbol{\theta}_0 & \boldsymbol{\varphi}_0 \\ A_r & A_\theta & A_\varphi \\ B_r & B_\theta & B_\varphi \end{vmatrix} \qquad \text{(σφαιρικές συντεταγμένες)}$$

$$= (A_\theta B_\varphi - A_\varphi B_\theta)\mathbf{r}_0 + (A_\varphi B_r - A_rB_\varphi)\boldsymbol{\theta}_0 + (A_rB_\theta - A_\theta B_r)\boldsymbol{\varphi}_0$$

1.3 Μετατροπές συντεταγμένων

1.3.1 Μετατροπές στα τρία συνήθη συστήματα συντεταγμένων

Έστω, αρχικά, ότι επιθυμούμε να "μετατρέψουμε" το διάνυσμα

$$\mathbf{A} = A_x(x,y,z)\mathbf{x}_0 + A_y(x,y,z)\mathbf{y}_0 + A_z(x,y,z)\mathbf{z}_0. \tag{1.18}$$

εκφρασμένο σε καρτεσιανές συντεταγμένες, στο διάνυσμα

$$\mathbf{A} = A_\rho(\rho,\varphi,z)\boldsymbol{\rho}_0 + A_\varphi(\rho,\varphi,z)\boldsymbol{\varphi}_0 + A_z(\rho,\varphi,z)\mathbf{z}_0, \tag{1.19}$$

εκφρασμένο σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Προς το σκοπό αυτό μπορούμε να ακολουθήσουμε τα εξής δύο βήματα. Να εκφράσουμε, αρχικά, τις συνιστώσες A_ρ, A_φ, A_z συναρτήσει των $A_x(x,y,z)$, $A_y(x,y,z)$, $A_z(x,y,z)$ και στη συνέχεια, οι συντεταγμένες x,y,z να εκφραστούν συναρτήσει των ρ,φ,z έτσι, ώστε οι A_ρ, A_φ, A_z να είναι συναρτήσεις των ρ,φ,z και όχι των x,y,z.

Αν, λοιπόν, πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο του μοναδιαίου διανύσματος $\boldsymbol{\rho}_0$ με τα δύο μέλη των (1.18) και (1.19) έχουμε αντίστοιχα

$$\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{A} = A_\rho, \tag{1.20}$$

$$\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{A} = A_\rho = A_x \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{x}_0 + A_y \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{y}_0 + A_z \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{z}_0. \tag{1.21}$$

Επειδή, όμως, $\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{z}_0 = 0, \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{x}_0 = \cos\varphi$ και $\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{y}_0 = \sin\varphi$, η (1.21) δίνει

$$A_\rho = \cos\varphi A_x + \sin\varphi A_y. \tag{1.22}$$

Παρόμοια, βρίσκεται ότι

$$A_\varphi = -\sin\varphi A_x + \cos\varphi A_y, \tag{1.23}$$

$$A_z = A_z. \tag{1.24}$$

Οι σχέσεις ανάμεσα στις ανεξάρτητες μεταβλητές στα δύο συστήματα είναι οι

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z. \tag{1.25}$$

Η ίδια διαδικασία μπορεί να ακολουθηθεί και για μετατροπή από ή σε οποιοδήποτε από τα τρία συστήματα συντεταγμένων, και γενικά από και σε κάθε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

Τα ίδια αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν και όταν εκφράσουμε τα μοναδιαία διανύσματα του ενός συστήματος συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων του άλλου συστήματος. Έτσι, για την περίπτωση που εξετάσαμε, αν αντικαταστήσουμε στην (1.19) τα μοναδιαία διανύσματα $\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\varphi}_0, \mathbf{z}_0$ από τις εκφράσεις

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \cos\varphi \mathbf{x}_0 + \sin\varphi \mathbf{y}_0, \quad \boldsymbol{\varphi}_0 = -\sin\varphi \mathbf{x}_0 + \cos\varphi \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0. \tag{1.26}$$

ή στην (1.18) τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$, από τις εκφράσεις

$$\mathbf{x}_0 = \cos\varphi \boldsymbol{\rho}_0 - \sin\varphi \boldsymbol{\varphi}_0, \quad \mathbf{y}_0 = \sin\varphi \boldsymbol{\rho}_0 + \cos\varphi \boldsymbol{\varphi}_0, \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0. \tag{1.27}$$

και εξισώσουμε τους αντίστοιχους όρους θα καταλήξουμε στα ίδια αποτελέσματα.

Στον πίνακα 1.1, φαίνονται οι αντιστοιχίες στα τρία συστήματα συντεταγμένων.

1.3.2 Απειροστές ποσότητες

Αν $(h_1)^2 = g_{11}, (h_2)^2 = g_{22}, (h_3)^2 = g_{33}$ είναι οι **μετρικοί συντελεστές** ενός ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων (u_1, u_2, u_3), τότε, η απειροστή απόσταση dl δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}(dl)^2 &= g_{11}(du_1)^2 + g_{22}(du_2)^2 + g_{33}(du_3)^2 \\ &= (h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2,\end{aligned} \tag{1.28}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1
ΑΛΛΑΓΗ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Καρτεσιανό	Κυλινδρικό	Σφαιρικό
x	$\rho\cos\varphi$	$r\sin\theta\cos\varphi$
y	$\rho\sin\varphi$	$r\sin\theta\sin\varphi$
z	z	$r\cos\theta$
$\mathbf{x}_0$	$\cos\varphi\,\boldsymbol{\rho}_0 - \sin\varphi\,\boldsymbol{\varphi}_0$	$\sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{r}_0 + \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{\theta}_0 - \sin\varphi\,\boldsymbol{\varphi}_0$
$\mathbf{y}_0$	$\sin\varphi\,\boldsymbol{\rho}_0 + \cos\varphi\,\boldsymbol{\varphi}_0$	$\sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{r}_0 + \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{\theta}_0 + \cos\varphi\,\boldsymbol{\varphi}_0$
$\mathbf{z}_0$	$\mathbf{z}_0$	$\cos\theta\,\mathbf{r}_0 - \sin\theta\,\boldsymbol{\theta}_0$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2
ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΚΑΙ ΑΠΕΙΡΟΣΤΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ

Γενικό	Καρτεσιανό	Κυλινδρικό	Σφαιρικό
u_1	x	ρ	r
u_2	y	φ	θ
u_3	z	z	φ
$g_{11}(h_1^2)$	1	1	1
$g_{22}(h_2^2)$	1	ρ^2	r^2
$g_{33}(h_3^2)$	1	1	$r^2\sin^2\theta$
$g^{1/2}$	1	ρ	$r^2\sin\theta$
$d\mathbf{l}$	$dx\mathbf{x}_0 + dy\mathbf{y}_0 + dz\mathbf{z}_0$	$d\rho\boldsymbol{\rho}_0 + \rho d\varphi\boldsymbol{\varphi}_0 + dz\mathbf{z}_0$	$dr\mathbf{r}_0 + rd\theta\boldsymbol{\theta}_0 + r\sin\theta d\varphi\boldsymbol{\varphi}_0$
$(dl)^2$	$(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$	$(d\rho)^2+\rho^2(d\varphi)^2+(dz)^2$	$(dr)^2+r^2(d\theta)^2+r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2$
dS_1	$dydz$	$\rho d\varphi dz$	$r^2\sin\theta d\theta d\varphi$
dS_2	$dxdz$	$dzd\rho$	$r\sin\theta d\varphi dr$
dS_3	$dxdy$	$\rho d\rho d\varphi$	$rdrd\theta$
dV	$dxdydz$	$\rho d\rho d\varphi dz$	$r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

όπου

$$(h_i)^2 = g_{ii} = \left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2 \qquad (i=1,2,3) \tag{1.29}$$

Όταν είναι γνωστοί οι μετρικοί συντελεστές, μπορούμε πολύ εύκολα να βρούμε τις εκφράσεις για την απειροστή απόσταση dl, τη στοιχειώδη επιφάνεια dS, το στοιχειώδη όγκο dV, την κλίση, την απόκλιση, τη στροφή κ.λ.π.

Η εξίσωση (1.28) υποδηλώνει ότι οι απειροστές αποστάσεις κατά μήκος των αξόνων είναι $\sqrt{g_{11}}du_1, \sqrt{g_{22}}du_2, \sqrt{g_{33}}du_3$. Έτσι, ένα στοιχείο επιφάνειας στο επίπεδο u_1-u_2 δίνεται από τη σχέση

$$dS = (\sqrt{g_{11}}du_1) \cdot (\sqrt{g_{22}}du_2) = \sqrt{g_{11}g_{22}}du_1du_2. \tag{1.30}$$

Παρόμοια, το στοιχείο όγκου dV δίνεται από τη σχέση

$$dV = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}du_1du_2du_3 = \sqrt{g}du_1du_2du_3. \tag{1.31}$$

Συνήθως, αντί των g_{11}, g_{22}, g_{33} χρησιμοποιούνται οι συντελεστές h_1, h_2, h_3, όπου $h_1 = \sqrt{g_{11}}, h_2 = \sqrt{g_{22}}, h_3 = \sqrt{g_{33}}$. Έτσι, από τις (1.29)-(1.31) σχηματίζουμε τον πίνακα 1.2 για τα τρία συστήματα συντεταγμένων.

1.4 Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Έστω χωρική καμπύλη C, η οποία σ' ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (u_1, u_2, u_3) έχει παραμετρική εξίσωση της μορφής

$$u_1 = u_1(t), \qquad u_2 = u_2(t), \qquad u_3 = u_3(t), \tag{1.32}$$

όπου t κάποια ανεξάρτητη παράμετρος.

Αν $f(u_1, u_2, u_3)$ είναι οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση, η $f(u_1, u_2, u_3)$ κατά μήκος της καμπύλης C εκφράζεται λόγω της (1.32), συναρτήσει της παραμέτρου t, ως

$$f(u_1, u_2, u_3)|_C = f(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) = F(t). \tag{1.33}$$

Αν $\mathrm{A}(u_1(t_1), u_2(t_1), u_3(t_1))$ και $\mathrm{B}(u_1(t_2), u_2(t_2), u_3(t_2))$ είναι δύο σημεία της καμπύλης C, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(u_1, u_2, u_3)$ κατά μήκος της καμπύλης C από το σημείο Α μέχρι το σημείο Β, ορίζεται ως

$$\int f(u_1, u_2, u_3)dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt. \tag{1.34}$$

Πολύ συχνά η παράμετρος t είναι μια από τις συντεταγμένες u_1, u_2, u_3 – έστω η u_1 – οπότε οι (1.32), (1.33) και (1.34) γράφονται αντίστοιχα

$$u_1, \qquad u_2(u_1), \qquad u_3 = u_3(u_1),$$

$$f(u_1, u_2, u_3)|_C = f(u_1, u_2(u_1), u_3(u_1)) = F(u_1), \tag{1.35}$$

$$\int f(u_1, u_2, u_3) du_1 = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} F(u_1) du_1. \tag{1.36}$$

Εκφράσεις ανάλογες προς την (1.36) προκύπτουν και για τα επικαμπύλια ολοκληρώματα ως προς u_2 και u_3.

Μια άλλη συνήθης περίπτωση είναι η χρησιμοποίηση του μήκος τόξου l της C στη θέση της παραμέτρου t. Τότε, η αντίστοιχη προς την (1.34) έκφραση είναι η

$$\int_C f(u_1, u_2, u_3) dl = \int_{l_1}^{l_2} F(l) dl, \tag{1.37}$$

όπου l_1 είναι το μήκος τόξου που αντιστοιχεί στο αρχικό σημείο A και l_2 το μήκος τόξου που αντιστοιχεί στο τελικό σημείο B. Αν το στοιχειώδες μήκος dl, εκφραστεί από τις (1.28) και (1.29) θα έχουμε

$$dl = \sqrt{(h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2} \tag{1.38}$$

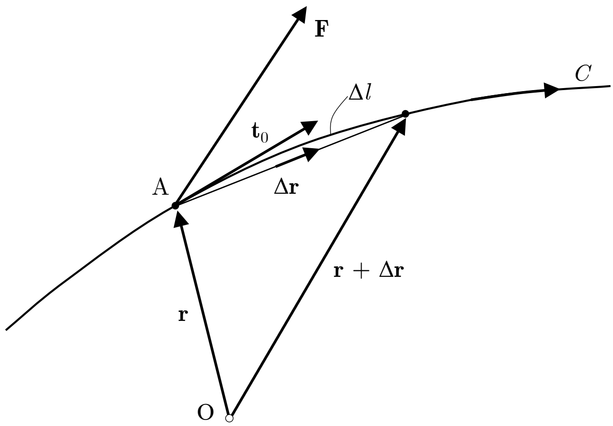
$$= \pm\sqrt{1 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \left(\frac{du_2}{du_1}\right)^2 + \left(\frac{h_3}{h_1}\right)^2 \left(\frac{du_3}{du_1}\right)^2}\, h_1 du_1 \tag{1.39}$$

$$= \pm\sqrt{1 + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \left(\frac{du_1}{du_2}\right)^2 + \left(\frac{h_3}{h_2}\right)^2 \left(\frac{du_3}{du_2}\right)^2}\, h_2 du_2 \tag{1.40}$$

$$= \pm\sqrt{1 + \left(\frac{h_1}{h_3}\right)^2 \left(\frac{du_1}{du_3}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{h_3}\right)^2 \left(\frac{du_2}{du_3}\right)^2}\, h_3 du_3. \tag{1.41}$$

Η διπλή προσήμανση $\pm$ στις πιο πάνω σχέσεις διασφαλίζει τη διατήρηση θετικής τιμής για το dl. Έτσι, αν π.χ. πρόκειται να γίνει ολοκλήρωση σε μια κατεύθυνση προς την οποία μειώνεται το u_1, η (1.39) θα περιέχει το αρνητικό πρόσημο. Από τις (1.39), (1.40) και (1.41), προκύπτουν οι εκφράσεις για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (1.37), όταν μια των u_1, u_2, u_3 αποτελεί την ανεξάρτητη μεταβλητή. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε την u_1 ως ανεξάρτητη μεταβλητή, από τις (1.37) και (1.39) έχουμε

$$\int f(u_1, u_2, u_3) dl = \pm \int f(u_1, u_2(u_1), u_3(u_1)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \left(\frac{du_2}{du_1}\right)^2 + \left(\frac{h_3}{h_1}\right)^2 \left(\frac{du_3}{du_1}\right)^2}\, h_1 du_1. \tag{1.42}$$



ΣΧΗΜΑ 1.3

Στην ειδική περίπτωση χρησιμοποίησης καρτεσιανών συντεταγμένων, η (1.42) γράφεται μετά την αντικατάσταση των h_1, h_2, h_3 από τον πίνακα 1.2 ($h_1 = h_2 = h_3 = 1$)

$$\int f(x,y,z)dl = \int f(x,y(x),z(x))\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}dx. \tag{1.43}$$

Τέλος, μια κατηγορία επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων, που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε πολλά προβλήματα του ηλεκτρομαγνητισμού, είναι εκείνη όπου η συνάρτηση $f(x,y,z)$ κατά μήκος της καμπύλης C ταυτίζεται με την εφαπτομενική διεύθυνση ενός διανυσματικού μεγέθους $\mathbf{F}(x,y,z)$ κατά μήκος της C.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ένα τέτοιο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x,y,z)$ και έστω ότι C είναι μια καμπύλη όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3. Αν $\mathbf{t}_0(x,y,z)$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, κατά την εφαπτομενική συνιστώσα στο σημείο A, τότε το ολοκλήρωμα

$$\int \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{t}_0(x,y,z)dl = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}, \tag{1.44}$$

προφανώς, παριστάνει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της εφαπτομενικής συνιστώσας της $\mathbf{F}(x,y,z)$ κατά μήκος της C. Επειδή, όμως, το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{t}_0$, ορίζεται, ως γνωστόν, από την

$$\mathbf{t}_0 = \lim_{\Delta l\to 0}\Delta\mathbf{r}/\Delta l,$$

δηλαδή την

$$\mathbf{t}_0 = d\mathbf{r}/dl, \tag{1.45}$$