ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

Επανάληψη και επέκταση

Ι.1. Μιγαδικοί αριθμοί

Θυμηθείτε ότι

Ορίζεται η φανταστική μονάδα ως $i = \sqrt{-1}$. Οι αριθμοί τύπου $\boldsymbol{z = \beta i}$ με $\boldsymbol{\beta \in R}$ ονομάζονται φανταστικοί ενώ οι αριθμοί τύπου $\boldsymbol{z = a + \beta i}$ ονομάζονται μιγαδικοί. Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{Re(z) = a}$ το πραγματικό μέρος και με $\boldsymbol{Im(z) = \beta}$, το φανταστικό μέρος του μιγαδικού z. Οι αριθμοί $\boldsymbol{a + \beta i}$ και $\boldsymbol{a - \beta i}$ ονομάζονται συζυγείς μιγαδικοί. Το σύνολο των μιγαδικών συμβολίζεται με το γράμμα $\boldsymbol{C}$. Ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να παρασταθεί γεωμετρικά στο λεγόμενο μιγαδικό επίπεδο ως διατεταγμένο ζεύγος με πρώτο στοιχείο το πραγματικό του μέρος και δεύτερο το φανταστικό του μέρος.

Μάθετε ότι

Θεώρημα ***Euler*** (χωρίς απόδειξη): Για κάθε φανταστικό αριθμό $\boldsymbol{bi}$ ισχύει ότι $e^{bi} = \cos b + i \sin b$ (sin = ημίτονο, cos = συνημίτονο)

Πόρισμα: Θεωρώντας το $\boldsymbol{b}$ ως γωνία και εφαρμόζοντας το θεώρημα του Euler με $\boldsymbol{b = \pi}$ έχουμε

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i \sin\pi = -1 + 0 \Rightarrow e^{\pi i} + 1 = 0$$

Να και ένα σχόλιο για τον τελευταίο αυτό τύπο που ενσωματώνει σε μια απλή σχέση ισότητας τα θεμελιώδη μεγέθη της Άλγεβρας. Από το βιβλίο του Ντενι Γκετζ (Denis Guedj) «Το θεώρημα του παπαγάλου». Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ, Μάρτιος 2000 (Τρίτη έκδοση). Μετάφραση Τεύκρος Μιχαηλίδης.

«... Βγαίνοντας από την αίθουσα, μην ξεχάσετε να θαυμάσετε τον τύπο που αναγράφεται πάνω από την πόρτα. Οφείλεται στον Λέοναρντ Όιλερ. Αναμφισβήτητα είναι ο ωραιότερος τύπος των Μαθηματικών.

Βγαίνοντας από την αίθουσα, όλος ο κόσμος σήκωσε το κεφάλι και διάβασε:

$$e^{i\pi} = -1$$

Ο κ. Ρυς με το λαιμό γερμένο προς τα πίσω, εξέταζε το πράγμα. Εντάξει, ο τύπος είναι πραγματικά μικρός. Αλλά, διάβολε, όμορφος, γιατί; Και μάλιστα όχι απλά όμορφος, αλλά ο ομορφότερος;

Ο κ. Ρυς τον ανέλυσε. Πέντε σύμβολα. Τα αναγνώριζε όλα εκτός από ένα. Υπήρχε βέβαια το π, τι το πιο φυσικό, σε ένα τέτοιο μέρος ήταν ο οικοδεσπότης. Ύστερα το «=» του Ρέκορντ, το «–1» των υπόγειων πάρκινγκ, το φανταστικό «i» του ίδιου του Λέοναρντ Όιλερ, που είχε ξεχάσει να το συμπεριλάβει στον κατάλογο με τα «κατατεθέντα σήματα».

Ύστερα υπήρχε αυτό το ***e***. Δεν το είχε ξαναδεί ποτέ στη ζωή του. Άραγε αυτό έκανε τον τύπο τόσο όμορφο;...».

Κατανοήστε ότι

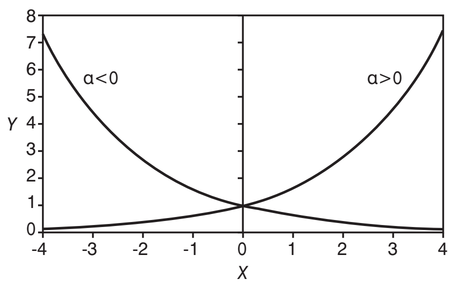
Οι μιγαδικοί αριθμοί μας χρειάζονται για να λύνουμε προβλήματα στα οποία εμφανίζονται τετραγωνικές, τέταρτης τάξης κ.λ.π. ρίζες με αρνητικό όρισμα. Συνεπώς, μια δευτεροβάθμια εξίσωση που δεν έχει καμία πραγματική ρίζα, έχει δύο ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών. Μάλιστα αν οι ρίζες μιας τέτοιας εξίσωσης είναι μιγαδικές τότε είναι συζυγείς (αυτό μπορείτε να το αποδείξετε πολύ εύκολα).

Παράδειγμα

Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $Y = Re\ (e^{(a+bi)X})$ όταν *i)* $b=0,\ a>0$ *ii)* $b=0,\ a<0$ *iii)* $b\neq0,\ a>0$ *iv)* $b\neq0,\ a=0$ *v)* $b\neq0,\ a<0$.

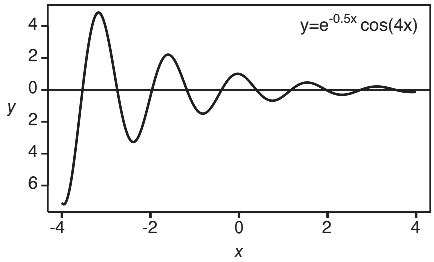
Απάντηση

i, ii) Για $\beta = 0$ έχουμε $Y = e^{aX}$, η γνωστή εκθετική συνάρτηση που για $a > 0$ είναι αύξουσα και τείνει ασυμπτωτικά στο άπειρο του X τείνοντος στο άπειρο ενώ για α < 0 είναι φθίνουσα και τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν του X τείνοντος στο άπειρο. Στο σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης για $a = 0.5$ και $a = -0.5$

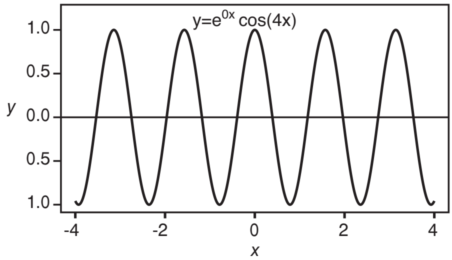


iii-v) $e^{(a+bi)X} = e^{aX}\, e^{biX} = e^{aX}\,[\cos(bX) + i\sin(bX)]$ οπότε

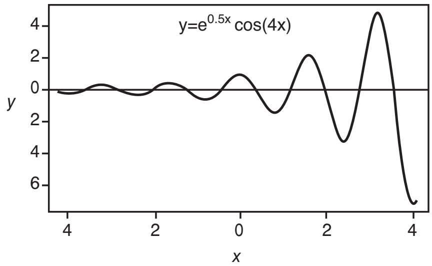
$Re(e^{(a+bi)X}) = e^{aX}\cos(bX)$



Αν $\boldsymbol{b \neq 0, a > 0}$ έχουμε το γινόμενο μιας αύξουσας εκθετικής επί μια τριγωνομετρική συνάρτηση με τιμές μεταξύ –1 και 1. Η γραφική παράσταση μοιάζει με αυτήν του διπλανού σχήματος όπου έχει τεθεί $a = 0.5$ και $b = 4$ (Θυμίζει αποκλίνουσα ταλάντωση).



Αν $\boldsymbol{b \neq 0, a = 0}$ ο εκθετικός όρος έχει σταθερή τιμή ίση με την μονάδα οπότε μένει μόνο ο τριγωνομετρικός όρος. Στο σχήμα απεικονίζεται η περίπτωση για $b = 4$.



Αν $\boldsymbol{b \neq 0, a < 0}$ τότε ο εκθετικός όρος φθίνει προσεγγίζοντας το μηδέν. Στο σχήμα απεικονίζεται η συνάρτηση με $a = -0.5$ και $b = 4$.

Ι.2. Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Ακολουθία πραγματικών αριθμών ονομάζεται μια απεικόνιση g των φυσικών αριθμών $N = \{1, 2, 3...\}$ στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών. Ο συμβολισμός $a_\nu = g(\nu)$ αναφέρεται στον ν-οστό όρο της ακολουθίας g.

Θυμηθείτε ότι

Μια ακολουθία μπορεί να οριστεί είτε με τον αναδρομικό της τύπο ή με το γενικό της τύπο.

Παράδειγμα

Η αναδρομική σχέση $X_{\nu+1} = 2X_\nu$ με $X_0 = 1$ και ν = 1, 2, 3... ορίζει την ακολουθία 2, 4, 8... Η ίδια ακολουθία ορίζεται από τον γενικό τύπο $X_\nu = 2^\nu$ για ν = 1, 2, 3...
Δεν είναι πάντα εύκολο να βρεθεί ο γενικός τύπος μιας ακολουθίας, σε πολλές μάλιστα περιπτώσεις δεν υπάρχει γενικός τύπος.

Η ακολουθία Fibonacci

Στην ακολουθία 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... ο κάθε όρος από τον τρίτο και μετά προκύπτει ως το άθροισμα των δύο προηγούμενων όρων. Ο αναδρομικός της τύπος είναι άρα ο $X_\nu = X_{\nu-1} + X_{\nu-2}$ με $X_1 = X_2 = 1$. Η ακολουθία αυτή μελετήθηκε αρχικά από τον Fibonacci και εν συνεχεία από πολλούς μαθηματικούς. Ο γενικός τύπος που δίνει τον ν-οστό όρο συναρτήση του ν είναι

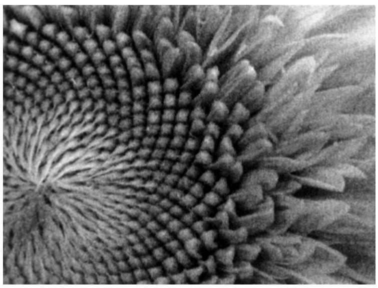
$$X_\nu = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^\nu - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^\nu\right].$$

Η ακολουθία Fibonacci και ο λόγος της χρυσής τομής (φ)

Αν $\varphi_\nu = \dfrac{X_{\nu+1}}{X_\nu}$ είναι ο λόγος δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας Fibonacci το όριο που τείνει το φ_ν του ν τείνοντος στο άπειρο είναι ο λόγος της χρυσής τομής $\varphi = 1.6180339887...$ Ο αριθμός φ είναι άρρητος.

Η ακολουθία Fibonacci στη βιολογία

Στην εικόνα φαίνεται το άνθος του φυτού που ονομάζεται κοινώς «Ήλιος». Παρατηρήστε ότι τα σπέρματα είναι διαταγμένα σε σπείρες. Μπορούμε να μετρήσουμε τον αριθμό των σπερμάτων **ν** σε μια σπείρα κινούμενοι από το κέντρο προς την περιφέρεια είτε δεξιόστροφα (έστω ότι είναι $\mathbf{\nu_\delta}$) είτε αριστερόστροφα έστω $\mathbf{\nu_\alpha}$. Οι δύο αριθμοί $\mathbf{\nu_\delta}$ και $\mathbf{\nu_\alpha}$ που θα βρούμε είναι διαδοχικοί όροι της ακολουθίας Fibonacci. Το ίδιο



συμβαίνει και σε πολλές άλλες βιολογικές δομές όπου τα επιμέρους στοιχεία διατάσσονται σπειροειδώς π.χ. σε κώνους κωνοφόρων και στα φύλλα ενός βλαστού.

Μια διαδικασία παραγωγής της ακολουθίας Fibonacci

Φανταστείτε μια διαδικασία αντικατάστασης συμβόλων από άλλα σύμβολα στην οποία υπάρχουν **ν** διαφορετικά σύμβολα. Η διαδικασία ξεκινά από μία αρχική διαδοχή συμβόλων (που ονομάζεται αξίωμα). Ακολουθώντας συγκεκριμένους κανόνες (ας τους ονομάσουμε γραμματικούς κανόνες) αντικαθιστούμε διαδοχικά κάθε σύμβολο από άλλα σύμβολα.

Μια υλοποίηση της παραπάνω διαδικασίας είναι η εξής:

Υπάρχουν μόνο δύο σύμβολα τα **Α** και **Β**

Αξίωμα: **Α**

Κανόνες αντικατάστασης: **Α** → **Β**   και **Β** → **ΑΒ**

Βήμα	Συμβολοσειρά	Μήκος συμβολοσειράς
1	A	1
2	B	1
3	AB	2
4	BAB	3
5	ABBAB	5
6	BABABBAB	8
7	ABBABBABABBAB	13
8		
9		

Παραγωγή

Μπορείτε να συμπληρώσετε τα βήματα 8 και 9;

Δείτε ότι το μήκος των συμβολοσειρών είναι η ακολουθία Fibonacci.

Άσκηση

Να γίνει γραφική παράσταση της ακολουθίας με γενικό τύπο $h_t = 2r^t$ αν *i*) $r = 0$, *ii*) $0 < r < 1$, *iii*) $r = 1$, *iv*) $r > 1$, *v*) $-1 < r < 0$, *vi*) $r = -1$, *vii*) $r < -1$

Προσοχή: Ο οριζόντιος άξονας είναι ο άξονας των φυσικών αριθμών.