I.

ΟΛΟΜΟΡΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

I.α. Εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς

Θεωρούμε γνωστά τα σχετικά με την θεμελίωση των μιγαδικών αριθμών σαν διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών. Απλά, ξαναθυμίζομε ότι αν $z_1 = x_1+iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$, όπου $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ και $i^2 = -1$, τότε

$$z_1 + z_2 = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2),$$

$$z_1z_2 = (x_1x_2-y_1y_2) + i(x_1y_2+y_1x_2)$$

Αν $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, τότε

$$-z = -x - iy\ ,$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}\,, \text{ όταν } x^2+y^2 \neq 0$$

Το σώμα των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται με το γράμμα $\mathbb{C}$.

Προφανώς υπάρχει αμφιμονότιμη αντιστοιχία ανάμεσα στο $\mathbb{C}$ και στο $\mathbb{R}^2$, τονίζομε όμως ότι πρόκειται για δύο *διαφορετικά πράγματα*, αφού π.χ. στο $\mathbb{R}^2$ δεν είχαμε ορίσει πολλαπλασιασμό και διαίρεση.

Καθώς ξέρομε από την θεμελίωση του $\mathbb{C}$, το σώμα αυτό είναι *ακριβώς τόσο μεγάλο*, όσο χρειάζεται για να λύνεται η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ μέσα σ' αυτό. Σε μεταγενέστερο κεφάλαιο θα δούμε ότι τελικά κάθε πολυωνυμική εξίσωση με συντελεστές στο $\mathbb{C}$ λύνεται μέσα στο $\mathbb{C}$.

Μία πρόσθετη σημαντική διαφορά του $\mathbb{C}$ από το $\mathbb{R}$ είναι η έλλειψη στο $\mathbb{C}$ σχέσης διάταξης, συμβιβαστής με τις αλγεβρικές πράξεις.

Ας υποθέσομε ότι υπάρχει μια τέτοια σχέση και ας τη συμβολίσομε με $(<, =, >)$. Όταν λέμε ότι η διάταξη είναι συμβιβαστή με τις αλγεβρικές πράξεις, εννοούμε ότι:

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta > 0, \quad \alpha . \beta > 0,$$

ενώ πρόσθετα, θα πρέπει να ισχύει ή $i > 0$ ή $-i > 0$, αφού η σχέση μας είναι διάταξη. Και στις δύο περιπτώσεις λαμβάνομε $i . i = -1 > 0$, που όμως αποκλείεται, αφού συνεπάγεται την $(-1) . (-1) = 1 > 0$ δηλαδή τελικά την $-1+1=0 > 0$.

Αν $z = x + iy$, γράφομε $x = \mathrm{Re}z$, $y = \mathrm{Im}z$ και ορίζομε τον συζυγή του z ως εξής:

$$\bar{z} = x - iy$$

Επομένως είναι $\mathrm{Re}\bar{z} = \mathrm{Re}z$ και $\mathrm{Im}\bar{z} = -\mathrm{Im}z$ και βεβαίως ισχύει

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}.$$

Το *μέτρο* του z ορίζεται από την

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\,\bar{z}}\,.$$

Έχομε $|z| \geq 0$, $z \in \mathbb{C}$, με $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Πρόσθετα ισχύει

$$|z_1\, z_2|^2 = z_1\, z_2\, \bar{z}_1\, \bar{z}_2 = z_1\, \bar{z}_1\, z_2\, \bar{z}_2 = |z_1|^2\, |z_2|^2,$$

δηλαδή,

$$|z_1\, z_2| = |z_1|\, |z_2|\,.$$

Ως γνωστόν, ισχύει η *τριγωνική ανισότητα*

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C} ,$$

καθώς επίσης η

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k| ,$$

όταν $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$.

Συνδυάζοντας την παραπάνω ανισότητα με εκείνη των *Cauchy-Schwarz* για πραγματικούς αριθμούς, παίρνομε την

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k \beta_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^2}$$

για $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Για πραγματικό t *ορίζομε*

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

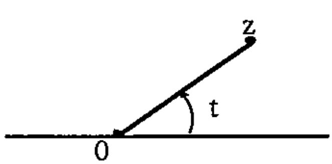
(η μιγαδική εκθετική συνάρτηση e^z θα οριστεί αργότερα).

Ισχύει φυσικά

$$|e^{it}| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1 .$$

Έστω τώρα $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

Από απλή γεωμετρική παρατήρηση έπεται ότι $z = |z|\, e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$.



Ο αριθμός t λέγεται *όρισμα του z* και *δεν ορίζεται μονοσήμαντα συναρτήσει του z*, αφού

$$z = |z|\, e^{i(t+2k\pi)}, \; k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ,$$

Γράφομε $t = \arg z$.

Αν θεωρήσομε τώρα εκείνον τον $t \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την $z = |z| e^{it}$, και *συγχρόνως* την $0 \leq t < 2\pi$, τότε αυτός ορίζεται μονοσήμαντα, εφ' όσον βέβαια $z \neq 0$, και λέγεται *πρωτεύον όρισμα* του z. Πολλές φορές γράφεται Arg z.

Στην περίπτωση που $z = 0$, δεν γίνεται καθόλου λόγος για όρισμα.

Στο εύλογο ερώτημα γιατί εισάγομε την έννοια του ορίσματος όπως προαναφέραμε και δεν ορίζομε εξ αρχής σαν όρισμα αυτό που εμείς καλέσαμε πρωτεύον όρισμα, η απάντηση δίδεται από την ιδιότητα

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \ , \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \ ,$$

η οποία ισχύει για το όρισμα, αλλά όχι πλέον για το πρωτεύον όρισμα.

Επειδή στην περαιτέρω οικοδόμηση της θεωρίας θέλομε να έχομε οπωσδήποτε αυτή την ιδιότητα, αναγκαστικά εισάγομε το όρισμα στην πολυσήμαντη μορφή του.

I.β. *Μερικές τοπολογικές έννοιες*
Το επ' άπειρον σημείο του μιγαδικού επιπέδου

Η απόσταση δύο σημείων z_1 και z_2 του $\mathbb{C}$ ορίζεται από την

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(\mathrm{Re}z_1 - \mathrm{Re}z_2)^2 + (\mathrm{Im}z_1 - \mathrm{Im}z_2)^2}\,.$$

Μέσω αυτής της απόστασης εισάγεται μία μετρική και άρα τελικά μία τοπολογία στο $\mathbb{C}$.

Έστω $\{z_n\}$ μία ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Θα λέμε ότι η $\{z_n\}$ συγκλίνει στο $z_0 \in \mathbb{C}$, και θα γράφομε $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε

$$|z_n - z_0| < \varepsilon \quad \text{για } n > n_0\,.$$

Προφανώς ισχύει

$$z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}z_0 \quad \textit{και} \quad \mathrm{Im}z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}z_0\,,$$

αφού $\left.\begin{array}{l} |\mathrm{Re}(z_n - z_0)| \\ |\mathrm{Im}(z_n - z_0)| \end{array}\right\} \leq |z_n - z_0| \leq |\mathrm{Re}(z_n - z_0)| + |\mathrm{Im}(z_n - z_0)|\,.$

Αμέσως φαίνεται ότι

$$z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0,\ w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w_0 \Rightarrow z_n + w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0 + w_0,$$

$$z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0,\ w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w_0 \Rightarrow z_n\, w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0\, w_0,$$

Ισχύει, ακριβώς όπως στο $\mathbb{R}$, το *κριτήριο σύγκλισης του Cauchy* :

Τότε ακριβώς ισχύει $z_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} z_0$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $n_0 = n_0(\varepsilon)$, έτσι ώστε $|z_n - z_m| < \varepsilon$ για όλα τα n, m με $n > n_0$, $m > n_0$.

Ας θεωρήσομε τώρα τις υπακολουθίες της $\{z_n\}$, δηλ. ακολουθίες $\{z_{n_k}\}$, με $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$.

Προφανώς είναι

$$z_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} z_0 \Rightarrow z_{n_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} z_0 ,$$

ενώ η αντίθετη κατεύθυνση είναι φυσικά λάθος.

Το σημείο $\alpha \in \mathbb{C}$ λέγεται *σημείο συσσώρευσης* της ακολουθίας $\{z_n\}$, όταν υπάρχει τουλάχιστον μία μη ταυτιζόμενη με το α υπακολουθία $\{z_{n_k}\}$ με

$z_{n_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \alpha$. Ακριβώς όπως στους πραγματικούς αριθμούς έχομε ότι:

Το $\alpha \in \mathbb{C}$ είναι σημείο συσσώρευσης της $\{z_n\}$

$$\Leftrightarrow$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει τουλάχιστον ένα n ώστε $0 < |z_n - \alpha| < \varepsilon$.

Η ακολουθία $\{z_n\}$ ονομάζεται *φραγμένη*, όταν υπάρχει ένα $M>0$, τέτοιο ώστε

$|z_n| < M$ για όλα τα n .

Προφανώς κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Το αντίθετο είναι λάθος, ισχύει όμως το

Θεώρημα των *Bolzano-Weierstrass*

Κάθε φραγμένη ακολουθία, απείρων στο πλήθος μιγαδικών αριθμών, έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο C.

Το θεώρημα αυτό μπορεί εύκολα να αποδειχθεί, αν δεχθούμε την αντίστοιχη πρόταση στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, η $|z_n|<M$, $n\in\mathbb{N}$, συνεπάγεται την $|\mathrm{Re}z_n|<M$, $n\in\mathbb{N}$, οπότε, από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass στο $\mathbb{R}$, υπάρχει υπακολουθία $\{z_{n_k}\}$, $k\in\mathbb{N}$, της $\{z_n\}$, ώστε η $\{\mathrm{Re}z_{n_k}\}$ να συγκλίνει.

Θεωρούμε τώρα την $\{\mathrm{Im}z_{n_k}\}$, $k\in\mathbb{N}$. Φυσικά ισχύει $|\mathrm{Im}z_{n_k}|<M$, $k\in\mathbb{N}$, άρα υπάρχει υπακολουθία $\{z_{n_{k_\nu}}\}$, $\nu\in\mathbb{N}$, έτσι ώστε η $\{\mathrm{Im}z_{n_{k_\nu}}\}$ να συγκλίνει. Όμως και η $\{\mathrm{Re}z_{n_{k_\nu}}\}$ συγκλίνει, άρα τελικά η $\{z_{n_{k_\nu}}\}$, $\nu\in\mathbb{N}$, συγκλίνει.

Μερικά λόγια τώρα για *σημειοσύνολα* στο $\mathbb{C}$.

Για $\alpha\in\mathbb{C}$ και $r>0$ γράφομε

$$D_r(\alpha) = \{z\in\mathbb{C},\ |z-\alpha|<r\}\ .$$

Ένα σύνολο $G\subset\mathbb{C}$ θα λέγεται *ανοικτό*, όταν για κάθε $\alpha\in G$, υπάρχει $r>0$, ώστε $D_r(\alpha)\subset G$.

Ένα σύνολο $A\subset\mathbb{C}$ θα λέγεται *κλειστό*, όταν το συμπλήρωμα $\mathbb{C}\setminus A$ είναι ανοικτό. Εύκολα φαίνεται ότι

$$A \text{ κλειστό} \Leftrightarrow \left(z_n\in A,\ z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \Rightarrow \alpha\in A \right).$$

Ένα σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$ λέγεται *σημείο συσσώρευσης ενός συνόλου* $A \subset \mathbb{C}$, όταν σε κάθε περιοχή του z_0 υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του A διάφορο του z_0.

Το *κλειστό περίβλημα* $\bar{A}$ του συνόλου A ορίζεται από τη σχέση

$$\bar{A} = A \cup \{\text{Τα σημεία συσσώρευσης του } A\}$$

Αποδεικνύεται εύκολα, ότι το $\bar{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A.

Σαν *σύνορο* ∂A ενός συνόλου $A \subset \mathbb{C}$ ορίζεται το σύνολο των σημείων z, για τα οποία κάθε κυκλικός δίσκος $D_r(z)$, $r > 0$, περιέχει *και* σημεία $\alpha \in A$ *και* σημεία $\beta \notin A$.

Ισχύει

$$G \text{ ανοικτό} \Leftrightarrow G \cap \partial G = \emptyset$$

$$A \text{ κλειστό} \Leftrightarrow \partial A \subset A$$

Από την στοιχειώδη Τοπολογία είναι γνωστό, ότι η ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. Το ίδιο ισχύει και για την τομή *πεπερασμένου πλήθους* ανοικτών συνόλων.

Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ λέγεται *συμπαγές*, όταν είναι κλειστό και φραγμένο.

Ισοδύναμος ορισμός: Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ λέγεται συμπαγές όταν για κάθε ακολουθία $\{z_n\}$ με $z_n \in A$ μπορεί να βρεθεί μία συγκλίνουσα υπακολουθία $\{z_{n_\nu}\}$ που να συγκλίνει μέσα στο A.

Θα εισάγομε τώρα μία πολύ σημαντική έννοια για την περαιτέρω οικοδόμηση της θεωρίας, συγκεκριμένα την έννοια του *επ' άπειρον σημείου του μιγαδικού επιπέδου*.